INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

Concours d'entrée
6 et 7 juin 1995

Epreuve de mathématiques I
Durée 3 heures

Dans tout le problème, a et b désignent deux nombres réels strictement positifs.

Pour tout nombre réel strictement positif c, on notera $(c)_n$ le nombre réel défini par récurrence par $(c)_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $(c)_{n+1} = (c+n)(c)_n$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (c)_n = c(c+1)\dots(c+n-1)$.

On observera en particulier que, pour tout entier naturel n on a : $(1)_n = n!$.

L'objet du problème est l'étude des séries entières de terme général $v_n z^n$ construites à partir de la série entière de terme général $u_n z^n$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(a)_n}{(b)_n} u_n.$$

Le sujet comprend trois parties. La première, qui concerne le cas particulier où $u_n = 1/n!$, est indépendante des deux autres. Le résultat du 4) de la deuxième partie peut être utile dans la dernière partie du problème (le candidat pourra bien sûr l'admettre s'il n'est pas parvenu à le démontrer).

PARTIE I

Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $v_n(a,b) = \dfrac{(a)_n}{n!(b)_n}$.

1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n(a,b)z^n$ est égal à $+\infty$.
Pour tout nombre complexe z, on posera désormais:

$$F(a,b,z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(a,b)z^n \left(= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(a,b)z^n, \text{ en posant } z^0 = 1 \text{ même lorsque } z = 0 \right).$$

2) a) Etablir les relations :

$$(1) \quad F(a,b,z) = \frac{b-a}{b} F(a,b+1,z) + \frac{a}{b} F(a+1,b+1,z)$$

$$(2) \quad F(a+1,b,z) = F(a,b,z) + \frac{z}{b} F(a+1,b+1,z).$$

b) Calculer $F(1,2,z)$, $F(1,3,z)$ et $F(2,3,z)$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k, la fonction $z \longrightarrow F(b+k,b,z)$ est de la forme $P_{k,b}(z)e^z$, où $P_{k,b}$ est une fonction polynômiale à coefficients réels dont on précisera le degré du polynôme associé.

3) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z fixé, la série de fonctions de terme général $f_n : (a,b) \longrightarrow \dfrac{(a+1)_{n-1}z^n}{(b+1)_{n-1}n!}$ est normalement convergente sur $]0,A]\times]0,+\infty[$, quel que soit le nombre réel positif A.

b) En déduire que la fonction $F_z : (a,b) \longrightarrow F(a,b,z)$ est continue sur l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$.

c) Soit $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < a \leq b\}$. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de F_z sur D, lorsque z est un nombre réel positif.

PARTIE II

1) Pour tout nombre entier n strictement positif, on pose :

$$\alpha_n = -\ln(a+n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k} \text{ et } \beta_n = -\ln(a+n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a+k}$$

(où ln désigne le logarithme népérien).

a) Démontrer que les suites $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) En déduire que la suite de terme général $-\ln(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k}$ est convergente.

2) Démontrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange (dont on justifiera l'emploi), que, pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

$$\left| \int_{a+n-1}^{a+n} \ln(t)dt - \ln(a+n-1) - \frac{1}{2(a+n-1)} \right| \leq \frac{1}{6(a+n-1)^2}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\gamma_n = \displaystyle\int_a^{a+n} \ln(t)dt - \ln((a)_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(a+k)}$.

a) Montrer que la suite $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) En déduire qu'il existe un nombre réel $\gamma(a)$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln((a)_n) + n - (a+n)\ln(a+n) + \frac{1}{2}\ln(n) \right) = \gamma(a).$$

4) Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, le quotient $\dfrac{(a)_n}{(b)_n}$ est équivalent à $\delta(a,b)n^{a-b}$, où $\delta(a,b)$ est un nombre réel strictement positif, indépendant de n, que l'on exprimera en fonction de a, b, $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

PARTIE III

1) Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\Phi_{a,b}(u)$ la suite réelle $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(a)_n}{(b)_n} u_n.$$

a) Montrer que les séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

b) On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Trouver les valeurs réelles de z pour lesquelles la série $\sum v_n z^n$ est convergente lorsque $a = b$, $a = b + 1$ et $b = a + 1$.

2) On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$ est strictement supérieur à 1.

Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que la restriction de $\Phi_{a,b}$ à E est un automorphisme de cet espace vectoriel.

3) Pour tout élément u de E, on pose : $N(u) = \mathrm{Sup}\{|u_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

a) Justifier l'existence de $N(u)$. On admettra que N est une norme sur E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que l'application linéaire $\Phi_{a,b}$ soit continue pour la norme N. On précisera la norme de l'application linéaire $\Phi_{a,b}$ lorsque cette condition est satisfaite.

c) Existe-t-il une norme sur E pour laquelle toutes les applications linéaires $\Phi_{a,b}$ soient continues (quels que soient a et b strictement positifs fixés)?